Олимпиада
школьников по математике
«ТИИМ-2023»
Заключительный тур
12 февраля 2023 года
10 класс

▷ **1.** Робот случайным образом выбирает натуральные числа x от 1 до 10000. Какова вероятность, что $N = 2^x - x^2$ не кратно 7.

Решение: Сколько существует целых чисел от 1 до 10000, для которых $2^x - x^2$ не делится на 7.
1. Исключим из значений x от 1 до 10000 те, при которых данное выражение делится на 7. Подсчитаем последние случаи.
Для того, чтобы $2^x - x^2$ делилось на 7 необходимо, чтобы 2^x и x^2 при делении на 7 давали равные остатки. Легко проверить, что остатки от деления 2^x на 7, начиная от $x = 1$, будут идти в такой последовательности: $2, 4, 1, 2, 4, 1, 2, 4, 1\ldots$

Остатки же от деления x^2 будут :

$1, 4, 2, 2, 4, 1, 0, 1, 4, 2, 2, 4, 1, 0\ldots$

Итак, первые остатки повторяются через 3, а вторые через 7 . Значит, через каждые 21 значение x оба остатка будут повторяться, т.е, например, $x = 22$ оба остатка будут те же, что и при $x = 0$, при $x = 23$ то же, что и при $x = 2$, и т.д.
Следовательно, достаточно будет подсчитать, при скольких значениях x в пределах $1 \leqslant x \leqslant 21$. 2^x и x^2 будут давать равные остатки.

Равные остати получаются при $x = 2, 4, 5, 6, 10, 15$ всего шесть значений. Так как $10000 = 21 \cdot 476 + 4$, то чисел, делящихся на 7 будет $6 \cdot 476 = 2856$ да ещё два чисел при $x = 21 \cdot 476 + 2$ и при x =$21 \cdot 476 + 4$. Всего 2858 чисел. Отсюда чисел, не делящихся на 7, будет :

$$10000 - 2858 = 7142.$$

Следовательно, вероятность равна $0,7142$.
Ответ: 0,7142.

▷ **2.** При каких значениях n сумма натуральных чисел от 1 до n делится на 99?

Решение: Сумма n первых натуральных чисел равна $\frac{n(n+1)}{2}$. По условию должно быть:

$$\frac{n(n+1)}{2} = 99m,$$

или:

$$n(n+1) = 2 \cdot 9 \cdot 11m,$$

где m - натуральное число. Так как n и $n+1$ - числа взаимно простые (причем одно из них непременно чётное), то одно из них должно делиться на 9. Одновременно это же число или второе должно делиться на 11. Отсюда имеем следующие возможные случаи:

$$n = 99x,$$

$$n + 1 = 99x, \text{ откуда } n = 99x - 1.$$

Оба решения удовлетворяют задаче при любом $x \geqslant 1$.

$$n = 9x;\ n + 1 = 11y \quad xиy\text{-разной чётности.}$$

Отсюда:

$$11y - 9x = 1.$$

Последнее уравнение решим обычным способом или, короче, так:
Имеем:

$$x = \frac{11y - 1}{9} = y + \frac{2y - 1}{9}.$$

Совершенно очевидно, что $\frac{2y-1}{9}$ дает целое значение при $y = 5$; тогда из уравнения получим $x = 6$.
Итак, имеем третье решение задачи:

$$x = 11t + 6,$$

а, следовательно,

$$n = 99t + 54.$$

$$n = 11x;\ n + 1 = 9y.$$

Отсюда:

$$9y - 11x = 1.$$

Так же, как и в предыдущем случае, найдем:

$$x = 9t + 4$$

и, следовательно:

$$n = 99t + 44.$$

Получаем 4-е решение.
Сопоставляя формулы, заключаем, что все значения n, удовлетворяющие условию задачи, являются членами одной из четырех арифметических прогрессий, у которых разность $d = 99$, а первые члены равны 44, 54, 98 и 99.
Ответ: 44, 54, 98 и 99.

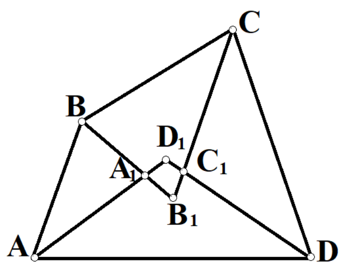
▷ **3.** Клетки шахматной доски занумерованы числами от 1 до 64: первый горизонтальный ряд слева направо - числами от 1 до 8, второй горизонтальный ряд слева направо - числами от 9 до 16 и т.д. На доске расставлены 8 ладей так, чтобы они не били друг друга. Какое наименьшее значение может принимать сумма номеров клеток, на которых стоят ладьи?

Решение: Напишем сверху над каждой вертикалью шахматной доски числа $1, 2, 3, \ldots, 8$, слева около каждой горизонтали - числа 0, 8, 16, 24, ..., 56; тогда можно считать, что в каждой клетке доски написана сумма двух чисел, соответствующих её вертикалям и горизонталям. Так как 8 ладей, стоящих на шахматной доске, не бьют друг друга, то обязательно в каждой вертикали и каждой горизонтали стоит по одной ладье. Значит, в сумму номеров тех клеток, на которых стоят ладьи, войдут по одному разу все числа 1, 2, ..., 8, соответствующие разным вертикалям, и по одному разу все числа 0, 8, 16, ..., 56, соответсвующие разным горизонталям. Поэтому сумма номеров всегда будет иметь одно и то же значение: $1+2+3+\cdots+8+0+8+16+\cdots+56 = 260$.
Ответ: 260.

▷ **4.** Биссектрисы углов данного выпуклого четырёхугольника своими пересечениями образуют новый четырёхугольник внутри данного. Биссектрисы этого нового четырёхугольника опять образуют четырёхугольник и т.д. Найти пределы, к которым стремятся последовательности углов этих четырёхугольников.

Решение: В первом полученном четырёхугольнике $A_1B_1C_1D_1$ имеем:

$$\begin{cases} \text{из } \triangle AA_1B: \; A_1 = 180^\circ - \frac{A+B}{2}; \\ \text{из } \triangle BB_1C: \; B_1 = 180^\circ - \frac{B+C}{2}; \\ \text{из } \triangle DC_1C: \; C_1 = 180^\circ - \frac{C+D}{2}; \\ \text{из } \triangle AD_1D: \; D_1 = 180^\circ - \frac{D+A}{2}. \end{cases} \tag{1}$$



Совершенно аналогично для углов второго четырёхугольника найдём:

$$A_2 = 180^\circ - \frac{A_1+B_1}{2}, \tag{2}$$

но из (1) имеем :

$$\frac{A_1+B_1}{2} = 180^\circ - \frac{A+2B+C}{4}. \tag{3}$$

Подставив из (3) в (2), получим:

$$\begin{cases} A_2 = \frac{A+2B+C}{4}, \\ B_2 = \frac{B+2C+D}{4}, \\ C_2 = \frac{C+2D+A}{4}, \\ D_2 = \frac{D+2A+B}{4}. \end{cases} \tag{4}$$

Из (4) найдём:

$$A_2 - C_2 = \frac{B-D}{2}; \;\; B_2 - D_2 = \frac{A-C}{2}. \tag{5}$$

Точно так же, продолжая далее, найдём:

$$A_4 - C_4 = \frac{B_2-D_2}{2}; \;\; B_4 - D_4 = \frac{A_2-C_2}{2}. \tag{6}$$

Итак, заменяя правые части в (6) из (5):

$$A_4 - C_4 = \frac{A-C}{4}; B_4 - D_4 = \frac{B-D}{4}. \tag{7}$$

Итак, после четырёхкратного построения разность между противоположными углами четырёхугольников уменьшается вчетверо. После $4n$ построений будем иметь:

$$A_{4n} - C_{4n} = \frac{A-C}{4^n}; \quad B_{4n} - D_{4n} = \frac{B-D}{4^n}.$$

Отсюда:

$$\lim_{n\to\infty}(A_{4n} - C_{4n}) = 0; \quad \lim_{n\to\infty}(B_{4n} - D_{4n}) = 0.$$

Или:

$$\lim A_{4n} = \lim C_{4n}; \quad \lim B_{4n} = \lim D_{4n}. \tag{8}$$

Но

$$A_{4n} + C_{4n} = \left(180^\circ - \frac{A_{4n-1}+B_{4n-1}}{2}\right) + \left(180^\circ - \frac{C_{4n-1}+D_{4n-1}}{2}\right) =$$

$$= 360^\circ - \frac{A_{4n-1}+B_{4n-1}+C_{4n-1}+D_{4n-1}}{2} = 360^\circ - \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ. \tag{9}$$

Из (8) и (9) заключаем, что

$$\lim A_{4n} = \lim C_{4n} = 90^\circ.$$

То же относительно углов B_{4n} и D_{4n}.

Ответ: 90°.

▷ **5.** Пусть A, B, C - углы треугольника. Какое наименьшее значение может принимать значение может принимать выражение $\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}}$?

Решение: Докажем, что

$$\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\leqslant\frac{1}{8},$$

$$\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{2}[\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}]\sin\frac{C}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}[\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{180-C}{2}0]\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{2}[\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{C}{2}-\sin^2\frac{C}{2}]=$$

$$=\frac{1}{2}[-(\sin^2\frac{C}{2}-\cos\frac{A-B}{2}\sin\frac{C}{2}+\frac{1}{4}\cos^2\frac{A-B}{2}+\frac{1}{4}\cos^2\frac{A-B}{2}]=$$

$$=\frac{1}{8}\cos^2\frac{A-B}{2}-\frac{1}{2}(\sin\frac{C}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2})^2\geqslant\frac{1}{8}\cos^2\frac{A-B}{2}\geqslant\frac{1}{8}$$

Равенство достигается при $A=B=C=60^\circ$, то,

$$\left(\sin^2\frac{A}{2}\cdot\sin^2\frac{B}{2}\cdot\sin^2\frac{C}{2}\right)^{-1}\geqslant 64.$$

Применив теорему о среднем, получим

$$\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}}+\frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}}\geqslant$$

$$\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}}\cdot\frac{1}{\sin^2\frac{B}{2}}\cdot\frac{1}{\sin^2\frac{C}{2}}}=$$

$$=3\sqrt[3]{\frac{1}{(\frac{1}{8})^2}}=12.$$

Ответ: 12.

▷ **6.** Пусть $f(t)=\frac{2t-1}{2}-\frac{1}{\pi}arctg(\operatorname{tg}\frac{2t-1}{2}\pi)$, найдите такие x, y, z, что

$$\begin{cases}x+f(y)+z=2,1+f(z)\\x+y+f(z)=3,2+f(x)\\f(x)+y+z=4,3+f(y),\end{cases}$$

Решение: Докажем, что $f(t)=[t]$
Полагая $t=k+\alpha$, где k - целое число, а $0<\alpha<1$, будем иметь

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{tg}\frac{2t-1}{2}\pi\right)=\operatorname{tg}\left[\operatorname{tg}\left(k\pi+\frac{2t-1}{2}\pi\right)\right]=$$

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{tg}\frac{2t-1}{2}\pi\right)=\frac{2t-1}{2}\pi.$$

Делая подстановку в данное выражениее, получим:

$$\frac{2k+2\alpha-1}{2}-\frac{1}{\pi}\cdot\frac{2\alpha-1}{2}\pi=$$

$$\frac{2k+2\alpha-1-2a+1}{2}=k=[t],$$

что и требовалось доказать.

Вернёмся к системе $\begin{cases}x+[y]+z=2,1\\x+y+[z]=3,2\\{[x]}+y+z=4,3,\end{cases}$ $\begin{cases}x=1,5\\y=0,7\\z=2,6.\end{cases}$

Ответ: 1,5; 0,7 ; 2,6.

▷ **7.** Известно, что расстояние от города Волгоградской области Урюписка (У) до города Кабардино-Балкарской республики Прохладный (П) - 999 км. Вдоль дороги стоят километровые столбы, на которых расстояния от У до П записаны так: $0,999$; $1,998$; $2,997$; $\ldots$ $999,0$. Сколько среди этих столбов таких, на которых есть только две различные цифры?

Решение: Два числа могут быть на одном столбе тогда и только тогда, когда их сумма равна 999. Поэтому, если рассмотреть один столб, на котором только две различные цифры, то, если одна из цифр X, другая обязательно $9-X$. Всего таких столбов, на которых есть числа, изображаемые цифрами X и $9-X$, существует $2^3=8$ (на каждом из первых трёх мест может стоять одна цифра: X или $9-X$); всех таких воможных пар цифр существует 5. Поэтому число всех столбов, на которых только две различные цифры, равно 40.
Ответ: 40.

▷ **8.** Доказать, что при любых натуральных m и n выражение $A=\frac{[(mn)!]^2}{(m!)^{n+1}\cdot(n!)^{m+1}}$ является натуральным числом.

Решение: Прежде всего

$$\frac{(mn)!}{(m!)^n}=\frac{(mn)!}{m!(mn-m)!}\cdot\frac{(mn-m)!}{m!(mn-2m)!}\cdot\ldots\cdot\frac{(2m)!}{m!m!}=$$

$$= C_{2m}^m \cdot C_{3m}^n \cdot \cdots \cdot C_{mn}^m.$$

Далее, легко проверить, что $C_{mk}^m = kC_{mk-1}^{m-1}$ и поэтому

$$\frac{(mn)!}{(m!)^n} = n! C_{2m-1}^{m-1} \cdot C_{3m-1}^{m-1} \cdot \cdots \cdot C_{mn-1}^{m-1},$$

откуда следует, что число $\frac{(mn)!}{(m!)^n n!}$ (а равно и число $\frac{(mn)!}{(n!)^m m!}$) - натуральное; но тогда натуральным будет и число

$$\frac{[(mn)!]^2}{(m!)^{n+1} \cdot (n!)^{m+1}} = \frac{(mn)!}{(m!)^n n!} \cdot \frac{(mn)!}{(n!)^m m!}$$

▷ **9.** Если $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2023}$ - положительные числа, то какое наименьшее значение принимает выражение

$$\sqrt{\frac{a_1 + a_2}{a_3}} + \sqrt{\frac{a_2 + a_3}{a_4}} + \cdots + \sqrt{\frac{a_{n-1} + a_n}{a_1}} + \sqrt{\frac{a_n + a_1}{a_2}}?$$

Решение: Как следует из неравенства $x + y \geqslant 2(xy)^{\frac{1}{2}}$ (неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим), выражение не меньше

$$\sqrt{2}\left(\sqrt[4]{\frac{a_1 a_2}{a_3^2}} + \sqrt[4]{\frac{a_2 a_3}{a_4^2}} + \cdots + \sqrt[4]{\frac{a_{n-1} a_n}{a_1^2}} + \sqrt[4]{\frac{a_n a_1}{a_2^2}}\right).$$

Поскольку произведение n корней, стоящих в скобках, равно 1, то по теореме Коши о среднем арифметическом и среднем геометрическом их сумма не меньше n. Получается, что наименьшее значение данного выражения $n\sqrt{2}$.
Ответ: $n\sqrt{2}$.

▷ **10.** На сторонах четырёхугольника $ABCD$ взяты точки A^1, B^1, C^1, D^2 так, что они делят все стороны в одном и том же отношении:

$$\frac{AA^1}{A^1B} = \frac{BB^1}{B^1C} = \frac{CC^1}{C^1D} = \frac{DD^1}{D^1A} = \frac{m}{n}$$

Найти отношение площадей $A^1B^1C^1D^1$ и $ABCD$.

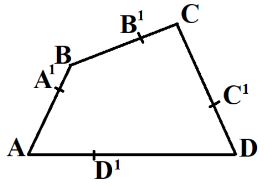
Решение: Составляя из выражения производные пропорции, будем иметь:

$$\frac{AA^1}{AB} = \frac{m}{m+n}. \quad (1)$$

$$\frac{DD^1 + D^1A}{D^1A} = \frac{m+n}{n},$$

или

$$\frac{AD^1}{AD} = \frac{n}{m+n}. \quad (2)$$



Отношение площадей треугольников AA^1D^1 и ABD, как имеющих по равенству углу $\angle A$, будет равно:

$$\frac{S_{AA^1D}}{S_{ABD}} = \frac{AA^1 \cdot AD^1}{AB \cdot AD} = \frac{mn}{(m+n)^2} \quad (3)$$

Совершенно аналогично получим:

$$\frac{S_{A^1BB^1}}{S_{ABC}} = \frac{S_{B^1CC^1}}{S_{BCD}} = \frac{S_{C^1DD^1}}{S_{CDA}} = \frac{mn}{(m+n)^2}. \quad (4)$$

Из (3) и (4), пользуясь свойством равных отношений, можем написать:

$$\frac{S_{AA^1D^1} + S_{A^1BB^1} + S_{B^1CC^1} + S_{C^1DD^1}}{S_{ABC} + S_{BCD} + S_{CDA} + S_{ABC}} =$$

$$= \frac{mn}{(m+n)^2}. \quad (5)$$

Обозначив площадь $ABCD$ через S, а площадь $A^1B^1C^1D^1$ через S^1 из (5) будем иметь:

$$\frac{S - S^1}{2S} = \frac{mn}{(m+n)^2}.$$

Отсюда:

$$2mnS = (m+n)^2 S - (m+n)^2 S^1,$$

$$(m+n)^2 S^1 = (m+n)^2 S^1 - 2mnS = (m^2 + n^2)S,$$

$$\frac{S^1}{S} = \frac{m^2 + n^2}{(m+n)^2}.$$

Ответ: $\frac{S_{A^1B^1C^1D^1}}{S_{ABCD}} = \frac{m^2+n^2}{(m+n)^2}$.